CAGIMA: Modèles utilisés pour la calcul d'impédances des résonateurs d'instruments à vent

T. Hélie, F. Silva

22 juin 2012, Version (V2)

Table des matières

Première partie

Préambule

Chapitre 1

Historique à propos du document

1.1 Echanges (réunions/mails) liés à ce document

20/06/2012 : IRCAM (réunion des participants)

22/06/2012 : LMA (F. Silva)

1.2 Rédactions et numéros de version

(v1) (Thomas Hélie, 20/06/2012) : première structure du document, constantes physiques utilisées, matrice de transfert de tube à abscisse curviligne et R''/R constant

(v2) (Fabrice Silva, 22/06/2012) : propagation 1D, impédances linéïques, impédance caractéristique, constante de propagation et vitesse de phase

Deuxième partie

Modèles

Chapitre 2

Généralités

2.1 Constantes physiques utilisées et notations

Température de référence $T_0 = 273.15K$.

Quantité	Description	Précision	Valeur (pour $T = 298.66\,\mathrm{K}$)	Unité
$c \;= 331.5\sqrt{T/T_0}$	célérité du son	$\pm 0.015\%$	346.63	$\mathrm{m.s^{-1}}$
$\rho \;= 1.2929\,T_0/T$	masse volumique de l'air	$\pm 0.01\%$	1.18	$\mathrm{Kg.m^{-3}}$
$\mu \;= 1.708 \times 10^{-5}\big(1 + 0.0029(T - T_0)\big)$	viscosité	$\pm 2\%$	1.834×10^{-5}	$\mathrm{Kg.m^{-1}.s^{-1}}$
$\kappa \;= 0.0241\big(1 + 0.0033(T - T_0)\big)$	conductivité thermique†	$\pm 9\%$	0.0261	$\mathrm{J.m^{-1}.s^{-1}.K^{-1}}$
$C_P = 0.24$	capacité calorifique spécifique à pression constante	$\pm 0.1\%$	0.24	$\mathrm{Cal.g^{-1}.^{\circ}C^{-1}}$
$\gamma \;= 1.402$	ratio de capacités calorifiques	$\pm 0.1\%$	1.402	adim.
$C_V = C_P/\gamma$	capacité calorifique spécifique à volume constant	$\pm 0.1\%$	0.1712	$\mathrm{Cal.g^{-1}.^{\circ}C^{-1}}$
$\ell_v \;= \mu/(\rho c)$ (cf. [1, (5.133) p.210])	épaisseur caractéristique de la couche visqueuse	$\pm 2\%$	4.4751×10^{-8}	m
$P_r \;= 0.71$	nombre de Prandtl	$\times$	0.71	adim.
$\ell_t \;= \ell_v/P_r$	épaisseur caractéristique de la couche thermique	$\times$	6.303×10^{-8}	m

Tab. 2.1 – Constantes physiques caractéristiques de l'air extraites de [1, p.212]. Les valeurs numériques sont obtenues pour la température absolue $T = 298.66\,\mathrm{K}$ ($25.6^{\circ}C$) déduite de la calibration du banc d'impédance par P. Eveno (cf. [2]), lors de mesures sur un pavillon de trombone.

† La conductivité thermique $\kappa = 5.77 \times 10^{-5}\big(1 + 0.0033(T - T_0)\big)$ $\mathrm{Cal.cm^{-1}.s^{-1}.^{\circ}C^{-1}}$ donnée dans [1] a été convertie en $\mathrm{J.m^{-1}.s^{-1}.K^{-1}}$ en prenant pour référence la calorie thermochimique $1\,\mathrm{Cal}_{th} \approx 4.184$ J.

2.2 Propagation pour les guides 1D

2.2.1 Tubes larges cylindriques de rayon r, section S

Les expressions suivantes sont tirées de la section 4.3 de [1] (pages 212-213).

Impédance linéïque liée aux pertes par viscosité aux parois

$$Z_v = \frac{i\omega\rho}{S}\left(1 + \frac{2}{r}\sqrt{\frac{\ell_v c}{i\omega}} + \frac{3}{r^2}\frac{\ell_v c}{i\omega}\right) \tag{2.1}$$

Admittance linéïque liée aux effets thermiques

$$Y_t = \frac{i\omega S}{\rho c^2}\left(1 + (\gamma - 1)\left(\frac{2}{r}\sqrt{\frac{\ell_t c}{i\omega}} - \frac{1}{r^2}\frac{\ell_t c}{i\omega}\right)\right) \tag{2.2}$$

Impédance caractéristique

$$\begin{gathered} Z_c = \sqrt{\frac{Z_v}{Y_t}} \sim \frac{\rho c}{S}\left(1 + \frac{\sqrt{\ell_v} - (\gamma - 1)\sqrt{\ell_t}}{r}\sqrt{\frac{c}{i\omega}} + \frac{\alpha_1}{r^2}\frac{c}{i\omega}\right) \\ \text{avec } \alpha_1 = \ell_v - (\gamma - 1)\sqrt{\ell_v \ell_t} + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\ell_t + \frac{3}{2}(\gamma - 1)^2 \ell_t \end{gathered} \tag{2.3}$$

Constante de propagation

$$\begin{gathered} \Gamma = \sqrt{Z_v Y_t} \sim \frac{i\omega}{c} + \frac{\sqrt{\ell_v} + (\gamma - 1)\sqrt{\ell_t}}{r}\sqrt{\frac{i\omega}{c}} + \frac{\alpha_2}{r^2}\frac{i\omega}{c} \\ \text{avec } \alpha_2 = \ell_v + (\gamma - 1)\sqrt{\ell_v \ell_t} - \frac{1}{2}(\gamma - 1)\ell_t - \frac{1}{2}(\gamma - 1)^2 \ell_t \end{gathered} \tag{2.4}$$

Vitesse de phase v_φ telle que $\Gamma = \alpha + \frac{i\omega}{v_\varphi}$

$$v_\varphi \sim c\left(1 - \frac{\sqrt{\ell_v} + (\gamma - 1)\sqrt{\ell_t}}{r}\sqrt{\frac{c}{2\omega}}\right)$$

Chapitre 3

Modèles en matrices de transfert

3.1 Généralités

3.1.1 Conventions, Variables de Kirchhoff, systèmes élémentaires et principe de connexion

Quelques éléments d'analyse complexe

Nous travaillons avec des systèmes acoustiques causaux stables de sorte que toutes les fonctions de transfert décrites ci-dessous sont analytiques dans le demi-plan droit de Laplace $s \in \mathbb{C}_0^+$ où $\mathbb{C}_\alpha^+ = \{s \in \mathbb{C} \mid \Re e(s) > \alpha\}$. Par exemple, une implication est que la dérivation fractionnaire d'ordre 1/2 utilisée pour les pertes visco-thermiques est donnée $\sqrt{s}$ où la racine carrée est le prolongement analytique sur $\mathbb{C}_0^+$ de la racine carrée positive sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque : Sur l'axe de Fourier $s = i\omega$, ceci ne laisse aucun choix. Si $\omega > 0$, la dérivation fractionnaire causale est donnée par $\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega}$ et non son complexe conjugué.

Autant que possible, les modèles ci-dessous seront donnés en fonction de la variable de Laplace s dans le plan de Laplace plutôt que sur l'axe de Fourier $i\omega$: on évite ainsi bien des ennuis car rien n'est fixé par une convention arbitraire sur une représentation d'ondes "mono-chromatiques" mais par des propriétés de systèmes physiques (causalité et stabilité).

Variables de Kirchhoff, systèmes multi-ports et convention

On considère ici les systèmes acoustiques élémentaires suivants, à 1 ou 2 (plus ?) ports :

(1P) bec

(2P) tronçons de tubes axi-symmétriques (droits, coniques, Υ-constants)

(2P) "les coudes pas chers de Simon Felix"

(1P,2P, ?) trous avec sous-coupage, plateau, pertes non linéaires et interaction acoustique extérieure

(1P) impédance de rayonnement

Jean : pour les trous le type dépend de ce que l'on met dedans, que fait-on ?

On représente l'état acoustique en un point d'intérêt par les variables de pression et de débit dans le domaine de Laplace $X = [P, U]^T$ où P est la pression acoustique et U est le débit entrant dans le système par le port (/l'interface) considéré.

Pour un port simple, on note $Z(s)$ l'impédance associée et $Y(s) = 1/Z(s)$ l'admittance associée.

Pour un port double, on note $T(s)$ la matrice 2×2 associée.

Il nous faut des jonctions à 3 ports pour les trous : Jean as-tu une proposition partique ? Comment est-ce fait dans PAFI ? Fait-on des raccord à volume nul ?

3.2 Modèles

Il s'agit d'une première version faite à base de copy-paste. Une fois le doc. un peu rempli, j'essaierais d'être plus concis et de faire un tableau de synthèse... Si les equations rentrent.

3.2.1 Bec

$$T(s) = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

où ...

3.2.2 Tronçons de tubes axi-symmétriques

On considère un tronçon de perce $z \mapsto R(z)$ dans l'espace physique. On introduit alors la description $\ell \mapsto \mathcal{R}(\ell)$ pour l'abscisse curviligne, donnée par

$$\ell = L(z) = \int_0^z \sqrt{1 + \big[R'(z)\big]^2} \mathrm{d}z, \ \mathcal{R}(\ell) = R\big(L^{-1}(\ell)\big). \tag{3.2}$$

Résultat 1 *Considérons un tronçon acoustique décrit sur $\ell \in (a,b)$ un paramètre constant $\frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}} = \Upsilon < 0$ (perce convexe), $\Upsilon = 0$ (droit, conique) ou $\Upsilon > 0$ (évasé).*

On note $X_\ell(s) = \big[\,P(\ell,s)\,,\,U(\ell,s)\,\big]^T$ l'état acoustique dans le tronçon à Υ constant. Alors,

$$X_b(s) = \mathbf{T}_{b,a}(s)\, X_a(s), \quad \text{avec} \quad \det \mathbf{T}_{b,a}(s) = 1 \quad \text{et où} \tag{3.3}$$

$\mathbf{T}_{b,a}(s) = \Lambda_{b^-}(s)\, \mathbf{M}_{b,a}(s)\, \Lambda_{a^+}(s)^{-1}$ $\Lambda_\ell(s) = diag\Big(\frac{1}{\mathcal{R}(\ell)}, \frac{\pi\mathcal{R}(\ell)}{\rho s}\Big)$, $[\mathbf{M}_{b,a}(s)]_{i,j} = \big(V_{i,j}(s)\big)^T\, \Phi\big((b-a)\Gamma(s)\big)$ *avec*

$$V_{11} = [1\,,\,\sigma(a^+)]^T, \qquad V_{12} = [0\,,\,-(b-a)]^T,$$

$$V_{21} = \Big[\frac{\sigma(b^-) - \sigma(a^+)}{b-a}\,,\,\frac{\sigma(a^+)\sigma(b^-) - (b-a)^2\Gamma^2}{b-a}\Big]^T, \qquad V_{22} = [1\,,\,-\sigma(b^-)]^T,$$

$\Phi(z) = [\cosh z\,,\,\frac{\sinh z}{z}]^T$ *and* $\sigma = \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}/(b-a)}$ *(ratio de pentes, sans dimension). La fonction Γ est la continuation analytique sur $\mathbb{C}_0^+$ de la racine carrée positive sur $\mathbb{R}^+$ de*

$$\Gamma(s)^2 = \left(\frac{s}{c}\right)^2 + 2\varepsilon\left(\frac{s}{c}\right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon, \tag{3.4}$$

où ε est la valeur moyenne $\varepsilon = \frac{\varepsilon^\star}{\ell_n - \ell_{n-1}} \int_{\ell_{n-1}}^{\ell_n} \frac{\sqrt{1-\mathcal{R}'(\ell)^2}}{\mathcal{R}(\ell)} \mathrm{d}\ell$ où $\varepsilon^\star = \sqrt{l_v} + (\gamma-1)\sqrt{l_t} \approx 3.125\times 10^{-4}\ m^{1/2}$.

La matrice $T_{b,a}$ definit un opérateur causal stable pour les profiles positifs, c'est-à-dire tels que $\mathcal{R}(a) > 0$, $\mathcal{R}(b) > 0$ and $(b-a)^2\Upsilon > -\pi$.

3.2.3 Coudes

3.2.4 Trous

3.2.5 Rayonnement

Portion de sphère pulsante

Fabrice Silva

Chapitre 4

Autres modèles

Joël ?

Troisième partie

Elements techniques pour l'optimisation

Chapitre 5

Format utilisé pour la description géométrique et les constantes physiques

On regarde les formats proposé par PAFI ?

Chapitre 6

Tableau des paramètres et nombre de degrés de liberté

Chapitre 7

Librairies et Codes (Matlab, C++, autres) utiliser

Pointeur web ?
repository sur CAGIMA ?

Bibliographie

[1] A. Chaigne and J. Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*. Belin, 2008.

[2] P. Eveno, J.-P. Dalmont, R. Caussé, and J. Gilbert. Wave propagation and radiation in a horn : Comparisons between models and measurements. *Acta Acustica*, 98 :158–165, 2012.